Journal of Theory, Mathematics and Physics
Vol. 3, No. 11, 2024 ISSN: 2181-4376
Innova Science

ХОС ОПЕРАТОРНИ НИЛЬПОТЕНТ ВА ХОСМАС ОПЕРАТОРЛАР ОРҚАЛИ ЁЙИШ

Аннотация: *Мазкур мақолада ҳар қандай нильпотент бўлмаган хос операторни нильпотент ва хос операторлар тўғри йиғиндиси кўринишида ягона усул билан ифодалаш мумкинлиги исботланган. Шунингдек, нильпотент операторлар хос қийматлари барчаси нолга тенг бўлиши ва аксинча, оператор барча хос қийматлари нолга тенг бўлса, бу оператор нильпотент оператор эканлиги кўрсатилди.*

Таянч сўзлар: *оператор, операторлар композицияси, нильпотент оператор, нильпотент оператор баландлиги (индекси), хос оператор, хосмас оператор, операторларнинг тўғри йиғиндиси.*

Information about the authors

Умаров Хабибулло Рахматуллаевич,
Ғойибназаров Хабибулло Рахматуллаевич
Гулистон давлат университети катта ўқитувчилари

КИРИШ

Чизиқли акслантиришлар ва изоморфизмлар мавзусида битта K майдон устида қурилган чизиқли фазоларнинг $\varphi : V \to W$ чизиқли акслантириш мономорфизми, эпиморфизми ва изоморфизми ўрганилади. Агар $V = W$ бўлса, $\varphi : V \to W$ чизиқли акслантириш оператор деб аталади. Чизиқли оператор матрицаси тушунчаси киритилиб, базис ўзгарганда оператор матрицасининг ўзгариши $A_\varphi^{(e')} = C^{-1} A_\varphi^{(e)} C$ формула билан аниқланади, бу ерда C – (e) базисдан (e') базисга ўтиш матрицасидир.

Ушбу тадқиқотнинг мақсади – нильпотент операторлар синфини тадқиқ қилиш орқали операторлар тўплами $O_p(V)$ ни таснифлаш.

Тадқиқот объекти ва қўлланилган методлар

Тадқиқот объекти – операторлар тўплами $O_p(V)$, хусусан, нильпотент операторлар, уларнинг хос сонлари ва хос векторлари.

Тадқиқот методи. Ушбу ишдаги баъзи теорема ва тасдиқларнинг исботида, асосан, математик индукция методидан ҳамда мантиқий келтириб чиқариш усулидан самарали фойдаланилади.

Олинган натижалар ва уларнинг таҳлили

Операторлар тўплами $O_p(V)$ ни алгебраик тузилма, φ ва ψ операторларнинг композицияси $\psi \circ \varphi$ ни уларнинг кўпайтмаси $\psi \cdot \varphi$ деб атаймиз. φ операторнинг m каррали композициясини унинг $m-$даражаси деб атаймиз:

$$\underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{m \ марта} = \varphi^m .$$

Маълумки, $\alpha, \beta \in K$ ҳамда m_1 ва m_2 натурал сонлар учун ушбу муносабат ўринлидир:

$$(\alpha\varphi)^{m_1}(\beta\varphi)^{m_2} = \alpha^{m_1}\beta^{m_2}\varphi^{m_1+m_2} . \ (1)$$

φ хосмас оператор учун φ^{-1} тескари оператор аниқланган ва

$$(\varphi^m)^{-1} = (\varphi^{-1})^m = \varphi^{-m} .$$

Агар φ хосмас оператор бўлса, у ҳолда ихтиёрий m_1 ва m_2 бутун сонлар ҳамда нолдан фарқли $\alpha, \beta \in K$ учун (1) муносабат ўринлидир. Хусусан, $\varphi^0 = 1$.

1.1 – таъриф. Агар φ операторнинг бирорта m $(m \geq 0)$ - даражаси нол оператор $\varphi^m = \theta$ бўлса, φ оператор нильпотент оператор дейилади.

$\varphi^p = \theta$ шартни қаноатлантирувчи энг кичик p сони φ нильпотент оператор баландлиги (индекси) дейилади.

1.2 – тасдиқ. φ нильпотент оператор баландлиги p га тенг ва $\vec{a} \in V$ вектор учун $\varphi^{p-1}\left(\vec{a}\right) \neq \theta$ бўлса, у ҳолда $\varphi^{p-1}\left(\vec{a}\right)$, $\varphi^{p-2}\left(\vec{a}\right)$, ... , $\varphi\left(\vec{a}\right)$, $\vec{a}$ векторлар системаси чизиқли эрклидир.

Ушбу тасдиқ ва унинг исботланишидан бевосита қуйидаги натижа келиб чиқади.

1.3 – натижа. Нильпотент $\varphi \in O_p(V)$ операторнинг баландлиги V фазо ўлчамидан катта эмас.

1.4 – тасдиқ. Нильпотент операторнинг ҳар қандай хос қиймати нолга тенг.

Бу тасдиқни кучайтириш мумкин. $f_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ характеристик кўпҳаднинг K майдонга қарашли ҳар қандай илдизи φ операторнинг хос қиймати бўлишидан ушбу тасдиқ келиб чиқади.

1.5 – тасдиқ. Агар φ нильпотент оператор алгебраик ёпиқ бўлган K майдон устида қурилган V вектор фазога таъсир қилса, (хусусан, C майдон устида қурилган V вектор фазога таъсир қилса), у ҳолда унинг характеристик кўпҳадининг барча илдизлари нолга тенг бўлади, яъни

$$f_\varphi(\lambda) = (-\lambda)^n . \ (2)$$

1.6 – тасдиқ. Нолмас ҳақиқий V фазода таъсир қилувчи ҳар қандай φ оператор бир ўлчамли ёки икки ўлчамли инвариант қисм фазога эгадир.

Бу тасдиқ қуйидаги леммадан бевосита келиб чиқади.

1.7 – лемма. $\lambda = \alpha + i\beta$ комплекс сони ҳақиқий V фазода таъсир қилувчи φ оператор характеристик кўпҳадининг илдизи бўлсин. Унда шундай чизиқли эркли $\vec{a}, \vec{b} \in V$ векторлар мавжуд бўлиб,

$$\begin{cases} \varphi\left(\vec{a}\right) = \alpha\vec{a} - \beta\vec{b} \\ \varphi\left(\vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \end{cases}$$

бўлади.

Агар $\alpha = 0$ бўлса, нолмас ҳақиқий V фазода φ оператор бир ўлчамли инвариант қисм фазога, $\alpha \neq 0$ бўлса, нолмас ҳақиқий V фазода φ оператор икки ўлчамли инвариант қисм фазога эга.

1.8 – тасдиқ. Ҳақиқий фазода таъсир қилувчи нильпотент оператори учун (2) формула ўринлидир.

Мисол. Стандарт нильпотент операторга циклик оператор мисол бўлади, чунки φ шундай операторки унинг учун V фазода $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис мавжуд бўлиб, $\varphi\left(\vec{e}_1\right) = \vec{0}$, $\varphi\left(\vec{e}_2\right) = \vec{e}_1$, $\varphi\left(\vec{e}_3\right) = \vec{e}_2$, ... , $\varphi\left(\vec{e}_n\right) = \vec{e}_{n-1}$ муносабат ўринли бўлади. Циклик базис деб аталувчи бу базисда φ оператор матрицаси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}.$$

1.9 – тасдиқ. φ нильпотент оператор баландлиги фазонинг ўлчамига тенг бўлганда, фақат ва фақат шу ҳолда φ оператор циклик оператор бўлади.

Энди бу ишдаги асосий мазмунни белгиловчи теорема ва унинг исботини келтирамиз.

1.10 – теорема. Ҳар қандай хос (нильпотент бўлмаган) φ операторни φ_1 нильпотент ва φ_2 хосмас операторларнинг тўғри йиғиндиси кўринишида ягона усул билан тасвирлаш мумкин.

Теоремани бир қатор ёрдамчи леммалардан фойдаланиб исбот қиламиз.

Дастлаб ишни, m натурал сони учун $M^m = Ker\,\varphi^m$, $N^m = \operatorname{Im}\varphi^m$ деб белгилашдан бошлаймиз.

1.11 – лемма. $a)$ M^m қисм фазо φ операторга нисбатан инвариантдир;

$b)$ $M^m \subset M^{m+1}$;

$v)$ агар $M^m = M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда $M^{m+1} = M^{m+2}$.

1.11 – лемма исботи. $a)$ $\forall \vec{x}$ учун $\vec{x} \in M^m = Ker\,\varphi^m \Rightarrow \varphi^m\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$,

$$\varphi^{m+1}\left(\vec{x}\right) = \varphi^m\left(\varphi\left(\vec{x}\right)\right) = \varphi\left(\varphi^m\left(\vec{x}\right)\right) = \varphi\left(\varphi^m\left(\vec{0}\right)\right) = \vec{0};$$

$b)$ юқоридаги исботга кўра $\vec{x} \in M^m = Ker\,\varphi^m \Rightarrow \vec{x} \in M^{m+1} = Ker\,\varphi^{m+1}$, яъни $M^m \subset M^{m+1}$;

$v)$ тасдиқни исботлаш учун, $b)$ тасдиққа мувофиқ $M^{m+1} \supset M^{m+2}$ муносабатни текшириш етарли. $\vec{x} \in M^{m+2}$ бўлсин, яъни $\varphi^{m+2}\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$. Унда

$$\varphi^{m+1}\left(\varphi\left(\vec{x}\right)\right) = \varphi^{m+2}\left(\vec{x}\right) = \vec{0} \Rightarrow \varphi\left(\vec{x}\right) \in M^{m+1} = M^m.$$

Демак, $\varphi^m\left(\varphi\left(\vec{x}\right)\right) = \vec{0}$, яъни $\vec{x} \in M^{m+1}$. Бундан $M^{m+2} \subset M^{m+1}$. Лемма исбот бўлди.

1.12 – лемма. $a)$ N^m қисм фазо φ операторга нисбатан инвариантдир;

$b)$ $N^m \subset N^{m+1}$;

$v)$ $N^m = N^{m+1}$ тенглик $M^m = M^{m+1}$ тенгликка эквивалент;

$g)$ агар $N^m = N^{m+1}$ бўлса, у ҳолда $N^{m+1} = N^{m+2}$.

1.12 – лемма исботи. Лемманинг $a)$, $b)$ ва $g)$ тасдиқлари 1.11 – лемманинг мос $a)$, $b)$ ва $v)$ тасдиқлари каби исботланади. Биз фақатгина лемманинг $v)$ қисмини исботлаймиз.

Ихтиёрий натурал p сони учун

$$\dim Ker\,\varphi^p + \dim \operatorname{Im}\varphi^p = \dim V \text{ ёки } \dim M^p + \dim N^p = \dim V \quad (3)$$

муносабат ўринли бўлишидан леммадаги $v)$ тасдиқнинг исбот келиб чиқади.

1.13 – лемма. Агар $M^m = M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда $V = M^m \oplus N^m$ бўлади.

1.13 – лемма исботи. (3) муносабатга кўра, $\dim M^m + \dim N^m = \dim V$ бўлади. Демак, $M^m \cap N^m = \left\{ \vec{0} \right\}$ тенгликнинг ўринли бўлишини текшириш етарли. $\vec{x} \in M^m \cap N^m$ бўлсин. Унда $\varphi^m\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ бўлади ва шундай $\vec{y} \in V$ вектор мавжудки, $\varphi^m\left(\vec{y}\right) = \vec{x}$ бўлади. Демак,

$$\varphi^{2m}\left(\vec{y}\right) = \varphi^m\left(\varphi^m\left(\vec{y}\right)\right) = \varphi^m\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$$

бўлади, яъни $\vec{y} \in M^{2m} = Ker\,\varphi^{2m}$. 1.11 – лемманинг $b)$ тасдиғига кўра, $M^m = M^{m+1} \Rightarrow M^{m+1} = M^{m+2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow M^{m+m-1} = M^{2m}$, яъни $M^m = M^{2m}$ бўлади. Демак, $\vec{y} \in M^m \Rightarrow \varphi^m\left(\vec{y}\right) = \vec{0}$ ва $\varphi^m\left(\vec{y}\right) = \vec{x} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Лемма исбот бўлди.

1.14 – лемма. Агар $M^m = M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда $\left(\varphi \,|\, M^m\right)$ – нильпотент оператор, $\left(\varphi \,|\, N^m\right)$ – эса хосмас оператор бўлади.

1.14 – лемма исботи. $\left(\varphi | M^m\right): M^m \to M^m$ оператор M^m таърифига кўра, $m \geq 1$ да нильпотент оператор ва унинг баландлиги m дан катта бўлмайди. $\left(\varphi \,|\, N^m\right)$ оператор хосмас бўлиши учун унинг ядроси $Ker\left(\varphi \,|\, N^m\right) = \left\{ \vec{0} \right\}$ бўлиши етарли. $\vec{x} \in N^m$ учун $\left(\varphi \,|\, N^m\right)\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ ёки $\varphi\left(\vec{x}\right) = \vec{0}$ бўлсин.

Унда $\vec{x} \in Ker\varphi = Ker\varphi^1 = M^1 \subset M^2 \subset \ldots \subset M^m$ бўлади.

Демак, $\vec{x} \in N^m \cap M^m$, 1.13 – леммага кўра $\vec{x} = \vec{0}$ ёки $Ker\left(\varphi \,|\, N^m\right) = \left\{ \vec{0} \right\}$ бўлади. Лемма исбот бўлди. Энди теоремани исботлаймиз.

1.10 – теорема исботи. Агар $M^m = M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда φ оператори нильпотент $\left(\varphi \,|\, M^m\right)$ оператор ва хосмас $\left(\varphi \,|\, N^m\right)$ операторларнинг тўғри йиғиндиси бўлиши 1.13 – лемма ва 1.14 – леммадан келиб чиқади.

Агар $M^m = M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда 1.13 – леммага кўра $V = M^m \oplus N^m$ бўлади. 1.14 – леммага кўра, $\left(\varphi \,|\, M^m\right)$ – нильпотент оператор, $\left(\varphi \,|\, N^m\right)$ – эса хосмас оператор бўлади.

Ихтиёрий $\vec{x} \in V$ вектор учун $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ бўлиб, $\vec{x}_1 \in M^m$ ва $\vec{x}_2 \in N^m$ бўлади. Унда

$$\varphi\left(\vec{x}\right)=\varphi\left(\vec{x}_1+\vec{x}_2\right)=\varphi\left(\vec{x}_1\right)+\varphi\left(\vec{x}_2\right)=\left(\varphi\,|\,M^m\right)\left(\vec{x}\right)+\left(\varphi\,|\,N^m\right)\left(\vec{x}\right)=$$

$$=\left(\left(\varphi\,|\,M^m\right)+\left(\varphi\,|\,N^m\right)\right)\left(\vec{x}\right).$$

Демак, φ операторни $\varphi=\left(\varphi\,|\,M^m\right)+\left(\varphi\,|\,N^m\right)$ тўғри йиғинди кўринишида тасвирлаш мумкин.

$\varphi=\varphi_1+\varphi_2$ тасвирнинг ягоналигини исботлаймиз. Фараз қилайлик, $V=M_1\oplus M_2$ бўлиб, $\left(\varphi\,|\,M_1\right)$ – нильпотент оператор, $\left(\varphi\,|\,M_2\right)$ – эса хосмас оператор бўлсин. Агар $M^m=M^{m+1}$ бўлса, у ҳолда $M_1=M^m$, $M_2=N^m$ бўлишини кўрсатамиз.

$\left(\varphi\,|\,M_1\right)$ оператор баландлиги p бўлсин. У ҳолда $\forall\ \vec{x}\in M_1$ вектор учун $\varphi^p\left(\vec{x}\right)=\vec{0}$ бўлади, яъни $\vec{x}\in M^p$ бўлиб, $M_1\subset M^p=Ker\,\varphi^p$. 1.11 – леммага кўра, $M^p\subset M^m$ бўлади. Демак, $M_1\subset M^m$.

$\vec{x}\in M_2$ бўлсин. $\left(\varphi\,|\,M_2\right)$ оператор хосмас бўлганлиги учун унинг ихтиёрий чекли даражаси ҳам хосмас оператор бўлади. Хусусан, $\left(\varphi\,|\,M_2\right)^m$ ҳам хосмас оператордир. Хосмас оператор эпиморфизм бўлишини инобатга олсак, шундай $\vec{y}\in M_2$ вектор мавжудки, у учун $\vec{x}=\left(\varphi\,|\,M_2\right)^m\left(\vec{y}\right)$ ёки $\vec{x}=\varphi^m\left(\vec{y}\right)$ ёки, ва ниҳоят, $\vec{x}=\varphi^m\left(\vec{y}\right)\in\operatorname{Im}\varphi^m=N^m$ бўлади. Демак, $M_2\subset N^m$. Бундан $\dim M_1\le\dim M^m$ ва $\dim M_2\le\dim N^m$ бўлиши келиб чиқади. (3) муносабатга кўра,

$$\dim M_1+\dim M_2=\dim V=\dim M^m+\dim N^m.$$

Бундан эса $\dim M_1=\dim M^m$ ва $\dim M_2=\dim N^m$ ёки $M_1=M^m$ ва $M_2=N^m$ бўлиши келиб чиқади. Теорема исбот бўлди.

Юқорида исбот қилган теоремадан фойдаланиб, қуйидаги тасдиқни исботлаш мумкин.

1.14 – тасдиқ. Агар φ оператор характеристик кўпҳадининг барча илдизлари нолга тенг бўлса, у ҳолда φ нильпотент оператордир.

Хулоса

Ушбу ишда нильпотент операторлар характеристик кўпҳадининг илдизлари ўрганилди ҳамда нильпотент оператор циклик оператор бўлишининг зарурий ва етарли шарти келтирилди. Энг асосийси, ҳар қандай хос операторни нильпотент ва хосмас операторларнинг тўғри йиғиндиси кўринишида ягона усул билан тасвирлаш мумкин эканлиги исбот қилинди.

Адабиётлар руйхати

1. Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд–во МГУ, 1990, – 328 с.
2. Люстерник Л. А., Соболов В. И. Элементы функционального анализа. М.: Физматлит. 2001, – 520 с.