



TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA YECHIMINING YAGONALIGI

Annotatsiya:

Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog'liq bir qator masalalari giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadi. Bu jarayonlarni tenglama bilan ifodalangandan keyin uning yechimi muhim ahamiyatga ega bo'lib tenglama korrekt yechilishi talab etiladi. Ushbu maqolada biror chekli sohada bir jinsli torning majburiy tebranish tenglamasi berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlaniradigan yechimning yagonaligi isbotlangan. Bu yechimning yagonaligini ko'rsatishda torning bir jinsli chegaraviy shartlar bilan erkin tebranish energiyasi saqlanish qonunining matematik ifodasi bo'lgan, kinetik va potensial energiyalar yig'indisidan iborat torning to'la energiya integralidan foydalanilgan.

Kalit so'zlar:

Aralash masala, yechimning yagonaligi, boshlang'ich shart, chegaraviy shart, kinetic energiya, potensial energiya, to'la energiya.

Information about the authors

Rahmonov Bahodir, Muqumov Asqar
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti, katta o'qituvchi;

Kirish. (Introduction) Mexanika va fizikaning tebranish jarayonlari bilan bog'liq bir qator masalalari giperbolik tipdagi tenglama bilan ifodalanadi. Ushbu maqolada biror chekli sohada bir jinsli torning majburiy tebranish tenglamasi berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlarni qanoatlaniradigan yechimning yagonaligi qaraymiz. Torning bir jinsli chegaraviy shartlar bilan erkin tebranish energiyasi saqlanish qonunining matematik ifodasi, kinetik va potensial energiyalar yig'indisidan iborat bo'lgan torning to'la energiya integralidan foydalanilgan holda yechimning yagonaligini ko'rstamiz.

Biror chekli $D = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ sohada bir jinsli torning majburiy tebranishini ifodalovchi ushbu

$$Lu \equiv \rho u_{tt} - T_0 u_{xx} = f(x, t) \quad (1)$$

bir jinsli bo'lmagan tor tebranish tenglamasini qaraylik. Bu yerda l – torning uzunligi, T – musbat son, ρ – torning zichligi, T_0 – torning taranglik kuchi, $f(x, t)$ esa torga ta'sir qilayotgan tashqi kuchlarning yig'indisi.

Yopiq D sohada aniqlangan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x, t)$ funksiyani toping:

1) $U(x, t)$ funksiya yopiq D sohada ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi va $\forall (x, t) \in D$ da (1) tenglamani qanoatlantirsin, ya'ni



$$U(x, t) \in C^2(\bar{D}); Lu(x, t) = f(x, t), \quad \forall (x, t) \in D$$

2) $U(x, t)$ funksiya ushbu

$$U(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad U_t(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (2)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantirsin.

3) $U(x, t)$ funksiya D sohaning chegarasida quyidagi

$$U(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t), \quad U(x, t)|_{x=l} = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantirsin; bu yerda $f(x, t)$, $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

Teorema. Agar (1) – (3) aralash masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u holda bu yechim yagona bo'ladi.

Faraz qilaylik, (1) – (3) masala ikkita $U_1(x, t)$ va $U_2(x, t)$ yechimlarga ega bo'lsin. U holda bu yechimlarning ayirmasi

$$U(x, t) = U_1(x, t) - U_2(x, t) \in C^2(\bar{D})$$

bo'lib, $v(x, t)$ funksiya bir jinsli

$$Lu = L(u_1 - u_2) = Lu_1 - Lu_2 = f(x, t) - f(x, t) = 0 \quad (4)$$

tor tebranish tenglamasini hamda bir jinsli boshlang'ich $0 \leq x \leq l$

$$U(x, t)|_{t=0} = [U_1(x, t) - U_2(x, t)]|_{t=0} = U_1(x, t)|_{t=0} - U_2(x, t)|_{t=0} = \varphi_0(x) - \varphi_0(x) = 0, \quad (5)$$

$$U_t(x, t)|_{t=0} = [U_{1t}(x, t) - U_{2t}(x, t)]|_{t=0} = U_{1t}(x, t)|_{t=0} - U_{2t}(x, t)|_{t=0} = \varphi_1(x) - \varphi_1(x) = 0 \quad (6)$$

va chegaraviy

$$U(x, t)|_{x=0} = [U_1(x, t) - U_2(x, t)]|_{x=0} = U_1(x, t)|_{x=0} - U_2(x, t)|_{x=0} = \mu_1(t) - \mu_1(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7)$$

$$U(x, t)|_{x=l} = [U_1(x, t) - U_2(x, t)]|_{x=l} = U_1(x, t)|_{x=l} - U_2(x, t)|_{x=l} = \mu_2(t) - \mu_2(t) = 0 \quad (8)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology)

Bir jinsli (4) – (8) masalaning $U(x, t)$ yechimi $\forall (x, t) \in \bar{D}$ bo'lganda aynan nolga teng ekanligini isbot qilamiz.

Buning uchun quyidagi



$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (9)$$

integralni qaraylik.

Bu integral torning bir jinsli chegaraviy shartlar bilan erkin tebranish energiyasi saqlanish qonunining matematik ifodasi bo'lib, u torning t vaqtidagi $\Delta x = dx$ elementning kinetik energiyasi

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Torning t vaqtidagi $\Delta x = dx$ elementining potensial energiyasi taranglik kuchining bajargan ishi bo'lib, u quyidagi

$$\Pi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l T_0 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

formula bilan aniqlanadi. (9) integralning t vaqtga bog'liq emasligini ko'raylik. Buning uchun (9) formulaning t bo'yicha hosilasini hisoblaymiz:

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^l (\rho u_t u_{tt} + T_0 u_x u_{xt}) dx \quad (10)$$

Bir jinsli chegaraviy shartlardan

$$u_t(0,t) = 0, \quad u_t(l,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu shartlarni inobatga olib, (10) formulaning ikkinchi qo'shiluvchisini x bo'yicha 0 dan l gacha bo'laklab integrallaymiz, natijada

$$\int_0^l T_0 u_x u_{xt} dx = T_0 u_x u_t \Big|_0^l - \int_0^l T_0 u_t u_{xx} dx - \int_0^l T_0 u_t u_{xx} dx \quad (11)$$

ifodani olamiz. Topilgan (11) ifodani (10) formulaga qo'yib, bir jinsli (4) tor tebranish tenglamasini inobatga olsak,

$$E'(t) = \int_0^l u_t (\rho u_{tt} - T_0 u_{xx}) dx = \int_0^l u_t L u dx = 0$$

tenglikni olamiz. Oxirgi tenglikdan $\forall t \in [0, T]$ uchun $E(t) = const$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun bir jinsli bo'lmagan boshlang'ich shartlarda

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho (\varphi_1(x))^2 + T_0 (\varphi_0(x))^2 \right] dx \quad (12)$$

Bu formuladan ko'rinadiki, uchlari mahkamlangan torning erkin ko'ndalang tebranishining to'la energiyasi ixtiyoriy vaqtda o'zgarmas va u torning boshlang'ich energiyasiga teng bo'ladi.

Natijalar va muhokama (Results and Discussions)

Bir jinsli (5) va (6) shartlari inobatga olib, (12) formuladan ushbu



$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\rho \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0$$

tenglikni olamiz. Oxirgi tenglik faqat va faqat $\forall (x,t) \in \bar{D}$ uchun $u_z(x,t) = 0$ va $u_x(x,t) = 0$ bo'lganda o'rinli. Bundan esa \bar{D} yopiq sohada $u(x,t) = const$ bo'ladi. Bir jinsli shartlarga ko'ra \bar{D} sohada $u(x,t) = 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations)

Demak, $u_1(x,t) \equiv u_2(x,t)$, farazimiz noto'g'ri ekan. Bu ziddiyat tor tebranish tenglamasi uchun qo'yilgan aralash masala yechimining yagona ekanligini isbotlaydi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati (References)

1. Salohitdinov M. Matematik fizika tenglamalari //Toshkent, "O'zbekiston nashriyoti" 2002-yil
2. Salohitdinov M. Islomov B. Matematik fizika tenglamalari fanidan misol va masalalar to'plami// Toshkent, "Mumtoz so'z" nashriyoti 2010-yil
3. Zikirov O. Matematik fizika tenglamalari// Toshkent, 2017-yil
4. Мукумов А. Х. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА //Ta'limning zamonaviy transformatsiyasi. – 2024. – T. 4. – №. 2. – С. 243-246.
5. Muqumov A.H. BIR O 'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING FURE ALMASHTIRISHI VA XOSSALARI //Educational Research in Universal Sciences. – 2024. – T. 3. – №. 4 SPECIAL. – С. 545-548.
6. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANING UMUMLASHGAN VA KUCHSIZ YECHIMLARI //International journal of scientific researchers (IJSR) INDEXING. – 2023. – T. 3. – №. 2.
7. Raxmonov B.A. "TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN CHEGARAVIY MASALADA KASR TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATOR QATNASHGAN SILJISHLI MASALA" Journal of Miasto Przeszlosci, Volume 49 (2024)
8. Raxmonov B.A "ISSIQLIK TARQALISH TENGLAMASINING FUNDAMENTAL YECHIMI VA UNING XOSSALARI" Journal of Miasto Przeszlosci, Volume 49 (2024)
9. Raxmonov B.A "PARABOLIK-GIPERBOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN XARAKTERISTIKADAN SILJIGAN CHIZIQLARNI O'Z ICHIGA OLGAN QUYI YARIM SOHADA CHEGARAVIY MASALA" Journal of Miasto Przeszlosci, Volume 49 (2024)